2007
Bruno D´Amore / Juan D. Godino
EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO COMO UN DESARROLLO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
*Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* julio, año/vol. 10, número 002
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 191-218

BRUNO D'AMORE y JUAN D. GODINO

# EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO COMO UN DESARROLLO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

## ONTOSEMIOTIC APPROACH AS A DEVELOPMENT OF THE ANTHROPOLOGICAL THEORY IN MATHEMATICS EDUCATION

RESUMEN. En este trabajo se presentan las principales características de dos puntos de vista usados como marcos teóricos de referencia en investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática, los denominados antropológico y ontosemiótico. El fin es resaltar analogías y diferencias entre estos dos enfoques y abrir la puerta hacia otros desarrollos teóricos.

PALABRAS CLAVE: Fundamentos teóricos, matemática educativa, epistemología, cognición, articulación teorías.

ABSTRACT. Presented in this work are the main characteristics of two points of view used as theoretical frames of reference in studies carried out in mathematical didactics: anthropological and ontosemiotic. The purpose is to highlight analogies and differences between these two approaches and open the door to other theoretical developments.

KEY WORDS: Theoretical foundations, mathematics education, epistemology, cognition, theory articulation.

RESUMO. Neste trabalho apresentamos as principais características de dois pontos de vista usados como marcos teóricos de referência em investigações realizadas em Didática da Matemática, denominados antropológico e ontosemiótico. A finalidade é enfatizar analogias e diferenças entre estas duas aproximações e abrir a porta para outros desenvolvimentos teóricos.

PALAVRAS CHAVE: Fundamentações teóricas; educação matemática; epistemologia; cognição, articulação de teorias.

RÉSUMÉ. Dans ce travail sont présentées les principales caractéristiques de deux approches théoriques utilisées dans certaines recherches au sein de la Didactique des Mathématiques, ces approches sont : l'anthropologique et l'ontosémiotique. Notre objectif est de relever les analogies et les différences entre ces deux approches, afin de laisser libre au cours à d'autres développements théoriques.

MOTS CLÉS: Fondements théoriques, didactique des mathématiques, épistémologie, cognition, articulation des théories.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(2): 191-218
Recepción: Enero 18, 2006/Aceptación: Junio 25, 2007

## 1. PLURALIDAD DE ENFOQUES TEÓRICOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA (DDM)

Establecer una fecha de nacimiento, aunque sea aproximada, para la Didáctica de la Matemática (DdM), es una tarea sin éxito seguro y unívoco, como sucede con cualquier otra disciplina. No obstante, creemos que muchos estarán de acuerdo en afirmar que, tal como la conocemos en la actualidad, la DdM surgió en los años setenta.

Si bien en un inicio había tantas interpretaciones de la DdM como investigadores se ocupaban de ella, a finales de los ochenta Romberg (1988) la concibió bajo unos parámetros "débiles" para la definición de una "ciencia consolidada y estable". Empero, el artículo de Sierpinska y Lerman (1996) sobre epistemología de la matemática y de la educación matemática mostraba una amplia variedad de enfoques teóricos para abordar la investigación en DdM, los cuales todavía son esenciales.

De cierto modo, la existencia de una pluralidad de enfoques teóricos puede significar enriquecimiento, mas para el progreso de una disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas parece inevitable hacer el esfuerzo para identificar algunos conceptos y métodos unificadores que, en un futuro inmediato, puedan cristalizar en un verdadero y propio programa de investigación en DdM (Lakatos y Musgrave, 1960).

En primer lugar, debemos hacer el esfuerzo de afrontar los problemas metadisciplinares, ya que hay una necesidad urgente de clarificar las nociones teóricas que se emplean en DdM, particularmente las que sirven para analizar los fenómenos cognitivos y del aprendizaje matemático. No obstante, falta un consenso en este tema, incluso al interior de la corriente que se suele llamar *epistemológica* o *didáctica fundamental* (Gascón, 1998), debido a que ocupa una variedad de términos e interpretaciones sin haber realizado análisis previo, confrontación, clarificación y refinamiento, entre los que están *conocimiento*, *saber*, *concepción*, *concepto*, *esquema*, *invariante operatorio*, *significado*, *praxeología*... Estas son nociones de base, instrumentos o herramientas cognitivas que tienen sus posibilidades y límites, de acuerdo con la interpretación que se haga de ellas

Ahora bien, el problema crucial que se ha definido en la DdM durante los últimos diez años –y, a nuestro entender, aún no terminado– es reconocer la necesidad de elaborar nuevos constructos cognitivos que superen las eventuales limitaciones de los existentes, ocupados a veces de manera acrítica. Sólo así será posible una sana y fundamental operación de reconocimiento sobre concordancias, complementariedades, redundancias o discordancias entre las diversas posiciones.

Reparemos en que el uso del término *cognitivo* es conflictivo en sí mismo, ya que puede aludir al conocimiento subjetivo o a los procesos mentales que los sujetos ponen en funcionamiento cuando se enfrentan a los problemas. Desde el punto de vista psicológico de la cognición matemática, tales procesos mentales que suceden en el cerebro son los únicos constituyentes del conocimiento que se deben tomar en cuenta. Sin embargo, dicha afirmación no atiende al hecho de que los sujetos dialogan entre sí, consensúan y regulan los modos de expresión y actuación ante cierta clase de problemas, ni que de esos sistemas de prácticas compartidas emergen objetos institucionales, los cuales a su vez condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de esas instituciones. Por tanto, junto con los *conocimientos subjetivos*, que nacen de los modos de pensar y actuar de los sujetos, es preciso considerar los *conocimientos institucionales*, a los cuales se atribuye cierto grado de objetividad.

Con ello, se puede distinguir en la cognición matemática –y en la cognición en general– la dualidad *cognición individual-cognición institucional*, que establece relaciones dialécticas complejas. La *cognición individual* es resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante cierta clase de problemas, mientras que la *cognición institucional* surge del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos ante cierta clase de problemas.

Una cognición individual no necesariamente coincide con una institucional porque se puede identificar la cognición personal con el término *cognitivo* (lo cual hace la psicología cognitiva), mientras que la cognición institucional con *epistémico*, dado que se ocupa de un conocimiento institucional. Esta distinción resulta de utilidad para afrontar dos enfoques teóricos de investigación en DdM sobre los que centraremos nuestra atención: la *teoría antropológica de lo didáctico* o *TAD* (Chevallard, 1992 y 1999) y el *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* o *EOS* (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002).

El objetivo del presente trabajo consiste en motivar la construcción del EOS a partir de la identificación de ciertas limitaciones en el desarrollo actual de la TAD, sobre todo en su manera de interpretar la cognición matemática, que restringe a su faceta institucional. Con este propósito expondremos una síntesis de las principales nociones que han desarrollado ambos enfoques teóricos, las ilustraremos con un resumen de dos investigaciones hechas en dichos marcos, y concluiremos resaltando la propuesta del EOS de articular la cognición institucional y la personal[1].

## 2. EL PUNTO DE VISTA ANTROPOLÓGICO

### 2.1. *Un punto de partida: la perspectiva pragmática del conocimiento matemático*

Ante la necesidad de clarificar la naturaleza del significado, se suele mencionar a dos categorías de teorías del significado, establecidas por Kutchera (1979): la *realista* o *figurativa* y la *pragmática*. Sólo aclarando el modo de concebir el *significado* podrá hablarse de *construcción del significado* y, por ende, de conocimiento matemático.

Describiremos brevemente la macrodistinción filosófica entre las teorías realistas y las pragmáticas, que aparece sintetizada en la Tabla I.[2] En la teoría realista, el significado es una *"relación convencional entre el signo y la entidad concreta o ideal que existe independientemente del signo lingüístico; por consiguiente, suponen un realismo conceptual"* (Godino y Batanero, 1994, p. 328). Como asegura Kutschera (1972): *"Según esta concepción, el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática"* (p. 34).

TABLA I

Principales características de las teorías realistas y pragmáticas (parte 1)

| | TEORIAS "REALISTAS" | TEORIAS "PRAGMATICAS" |
|---|---|---|
| Significado | Relación convencional entre signo y entidad concreta o ideal, independiente del signo lingüístico | Depende del contexto y del uso |
| Semántica vs pragmática | División neta | No división o división difusa |
| Objetividad o intersubjetividad | Total | Faltante o discutible |

[1] Véase Godino (2006), donde se amplía el análisis comparativo del EOS con otros modelos teóricos desarrollados en el ámbito de la didáctica francesa.

[2] Para profundizar en los aspectos críticos, históricos y epistemológicos de este tema, véase Godino y Batanero (1994) y D'Amore (2003).

TABLA I
Principales características de las teorías realistas y pragmáticas (parte 2)

| | TEORIAS "REALISTAS" | TEORIAS "PRAGMATICAS" |
|---|---|---|
| semántica | Las expresiones lingüísticas tienen funciones puramente semánticas | La expresión lingüística y la palabra tienen significados "personales", son significativas en contextos oportunos, pero no tienen significados absolutos, en sí mismas |
| Análisis | Posible y lícito: la lógica, por ejemplo | Posible sólo un análisis "personal" o subjetivo, no generalizable, no absoluto |
| Visón epistemológica derivada | Concepción platónica de los objetos matemáticos | Concepción problemática de los objetos matemáticos |
| Conocer | Descubrir | Usar en contextos oportunos |
| Conocimiento | Es un absoluto | Es relativo a las circunstancias y al uso específico |
| ejemplos | Wittgenstein del *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel] | Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas* [Lakatos] |

La semántica realista atribuye a las expresiones lingüísticas funciones puramente semánticas. Así, el significado de un nombre propio (por ejemplo, 'Bertrand Russell') es el objeto que el nombre propio indica (Bertrand Russell); los enunciados atómicos expresan hechos donde se describe a la realidad (como '*A* es un río', donde *A* es el nombre de un río), y los predicados binarios designan atributos, indicados en la frase que los expresan (como '*A* lee *B*', donde la persona *A* lee la cosa *B*). Por tanto, toda expresión lingüística constituye un atributo de cierta entidad y la relación nominal que se deriva es la única función semántica. Se reconoce aquí la base de la posición de Frege, Carnap y la de Wittgenstein en el *Tractatus*.

Una consecuencia de esta posición es admitir la posibilidad de una *observación científica objetiva*, como puede ser, en un primer nivel, una lógica de los enunciados y de los predicados.

Desde el punto de vista que nos interesa, si aplicamos los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática estamos abocados a una visión platónica de los objetos matemáticos, desde esta perspectiva elementos como las estructuras tienen una existencia real que no depende del ser humano, en cuanto pertenecen a un dominio ideal. Por tanto, *conocer* desde un punto de vista matemático significa *descubrir* entes y sus relaciones en tal dominio.

Es claro que tal perspectiva implica un absolutismo sobre el conocimiento matemático en cuanto sistema de verdades seguras, eternas, no modificables por la experiencia humana, ya que estas verdades son precedentes o, por lo menos, ajenas e independientes a la experiencia humana. Posturas de este tipo, aunque con diversas matizaciones, fueron sostenidas por Frege, Russell, Cantor, Bernays y Gödel, pero también hallamos críticas violentas, como el convencionalismo de Wittgenstein y el quasiempirismo de Lakatos (Ernest, 1991; Speranza, 1997).

Para las teorías pragmáticas, las expresiones lingüísticas tienen significados diversos, según el contexto en el que se usen, de ahí que resulte imposible cualquier observación científica objetiva porque el único análisis posible es *personal* o *subjetivo*, en todo caso circunstancial y no generalizable. No se puede hacer otra cosa que examinar los diversos *usos*, que determinan el significado de los objetos.

Se reconoce aquí la posición de Wittgenstein en sus *Investigaciones filosóficas*, cuando admite que la significatividad de una palabra depende de su función en un *juego de lenguaje*, puesto que allí tiene un modo de *uso* y un fin concreto para el cual se ha usado. La palabra no tiene por sí un significado, pero puede ser contextualmente significativa (Wittgenstein, 1953, 1976).

Los objetos matemáticos son, por tanto, símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas de usos que caracterizan a la pragmática humana (o, al menos, a grupos homogéneos de individuos), y se modifican continuamente en el tiempo, según las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y su significado dependen no sólo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución; en suma, dependen de la práctica humana.

Es obvio que la perspectiva realista y la pragmatista no son del todo complementarios ni están netamente separados, aunque por motivos de claridad hemos preferido dar esta impresión *fuerte*. Volveremos sobre este punto.

Quisiéramos también señalar cómo, según Bloor (1982), la visión pragmática recoge la *herencia de Wittgenstein*, y que la elección del campo pragmático aparece a muchos investigadores como muy próxima a la realidad del proceso empírico del cual se ocupa la DdM (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2001).

### 2.2. *Principales nociones del punto de vista antropológico en DdM*

Haber forzado al investigador a centrar toda su atención en las actividades de las personas implicadas en la matemática –no sólo resolver problemas, sino también comunicar la matemática– es uno de los méritos que se reconoce al punto de vista antropológico, el cual ha inspirado a otras perspectivas, como la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999).

¿Por qué este adjetivo de *antropológico*? Esto no es privativo de la aproximación creada por Chevallard en los años ochenta, como él mismo afirma, sino un *efecto del lenguaje* (Chevallard, 1999); distingue a la teoría, la identifica, pero no le es peculiar de manera unívoca. Ahora bien, la TAD se centra casi de manera exclusiva en la dimensión institucional del conocimiento matemático, siendo un desarrollo del programa de investigación iniciado con la *didáctica fundamental* (Gascón, 1998). El punto crucial radica en que la TAD *"pone la actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la matemática, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales"* (Chevallard, 1999).

En la tradición pragmática, Chevallard (1991) definió al objeto matemático de la siguiente manera:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito. (p. 8)

Al ser el *praxema* un objeto material ligado a una práctica, el objeto es entonces *emergente de un sistema de praxemas.*

En este enfoque teórico no tiene interés la noción realista ingenua *significado de un objeto* (del conocimiento en general, matemático en particular), sino más bien la de *rapport à l'objet*, relación al objeto. Sobre esta idea se apoya la construcción inicial de la teoría del conocimiento o antropología cognitiva de Chevallard, en cuyo interior se puede ubicar a la didáctica. Además, para esta postura teórica es central la persona o la institución (como conjunto de personas) que se pone en relación al objeto, no el objeto en sí:

> Un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (resp., para I) si existe un objeto, que represento por R(X,O) [resp., R(O)], al cual llamo relación personal de X a O (resp., relación institucional de I a O) [Chevallard, 1992, p. 9].

Esta posición ha generado un cambio interesante en los enfoques teóricos usados actualmente en DdM, tanto más si se subrayan las investigaciones de otros autores para clarificar y hacer operativas las nociones de Chevallard. Por ello, han creado instrumentos conceptuales adecuados y los han comparado con otros, introducidos en el campo por otras posiciones relacionadas. Algunas nociones propuestas como instrumentos para describir la actividad matemática y sus objetos institucionales emergentes son: *obra matemática*, *praxeología matemática, praxeología didáctica* y *relación institucional al objeto*.

*Obra matemática:* Es cualquier cosa que surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y un medio para alcanzar la solución, en el seno de cierta institución, a tareas o problemas matemáticos (Gascón, 1998). Algunos ejemplos los ofrece Chevallard:

> Podemos considerar la obra matemática que responde, entre otras, a las preguntas del tipo: '¿Cómo conseguir un determinado objeto al menor precio posible?' '¿Cómo lograr el mayor efecto posible con determinado esfuerzo?' '¿Cómo efectuar el máximo trabajo en un tiempo dado?' (...) Se trata de cuestiones que, de un modo u otro, se proponen en la institución escolar (Chevallard, 1996).

Las cuestiones o tareas y problemas a los que da respuesta una obra matemática se cristalizan en uno o más *tipos de problemas*. Dicho concepto nos será útil en breve.

*Praxeología matemática*: Sistema de prácticas que una institución considera apropiadas para resolver un tipo de tareas, de acuerdo con Chevallard, Bosch y Gascón (1997). El concepto es análogo al de *significado institucional de un objeto matemático*, propuesto por Godino y Batanero (1994).

Si se adopta una epistemología de tipo pragmatista, las praxeologías atañen a los significados de los objetos matemáticos (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas).

*Praxeología didáctica*: Coincide con la praxeología matemática, pero la componente praxémica alude a las tareas del profesor y de los alumnos, técnicas de estudio, etc. Incluye referencias problemáticas al lenguaje específico (dialógico) que se instaura entre el profesor y el alumno y al objeto llamado *trayectoria didáctica* (proyecto didáctico), en el cual asume significado específico el tiempo durante el cual se desarrolla (Chevallard, 1999).

*Relación personal al objeto*: Chevallard (1991) afirma que reagrupa todas las nociones propuestas en la psicología (como los casos de concepción, intuición, esquema, representación interna). Es, a su vez, un objeto, $R(X,O)$, definido anteriormente como *relación personal de* X *(persona) al objeto* O *(objeto).*

*Relación institucional al objeto*: Chevallard (1991) dice que es a su vez un objeto $R(I,O)$, definido más arriba como relación institucional de $I$ (institución) a $O$ (objeto).

La noción de praxeología se ha convertido con el tiempo en una de las bases para la teoría antropológica. Es descrita por Chevallard (1999) de la siguiente manera:

> Alrededor de un tipo de tareas T se encuentra así, en principio, una tripleta formada por al menos una técnica, $\tau$, por una tecnología de $\tau$, $\theta$, y por una teoría de $\theta$, $\Theta$. El total, indicado por [$T/\tau/\theta/\Theta$], constituye una praxeología puntual, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología –u organización praxeológica– está pues constituida por un bloque práctico-técnico, [$T/\tau$], y por un bloque tecnológico-teórico [$\theta/\Theta$].
>
> El bloque [$\theta/\Theta$] se identifica habitualmente como un saber, mientras que el bloque [$T/\tau$] constituye un saber-hacer. Por metonimia, se designa corrientemente como saber la praxeología [$T/\tau/\theta/\Theta$] completa, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una minoración del saber-hacer, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías. (pp. 224-229)

La teoría antropológica no indica que las técnicas se consideran como herramientas para el análisis de la cognición del sujeto, sino que la cognición se interpreta sólo en un sentido institucional. Por tanto, son herramientas de tipo epistémico, no cognitivo.

Aunque no se ha precisado hasta el momento, parece claro que como constituyentes de las tecnologías y de las teorías están los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas, mediante los cuales se logra justificar y explicar las técnicas. Dichas nociones están implícitamente contenidas en las praxeologías matemáticas y tienen naturaleza epistémica (por ende, institucional).

*Praxeología matemática global*: Es la extensión de la praxeología matemática puntual a todos los tipos *T* posibles de problemas, con las variaciones consiguientes.

### 2.2.1. *Una interpretación de la Teoría Antropológica de Chevallard*

Sierpinska y Lerman (1996) presentan una síntesis e interpretación de la antropología del conocimiento elaborada por Chevallard, a la que consideran como una ampliación de la epistemología (tradicionalmente, el objeto de estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico). Ahora bien, la antropología del conocimiento comprende no sólo los mecanismos de la producción, sino también las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza y transposición, es decir, el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (por ejemplo, la escuela). Como el punto de vista antropológico nace de los estudios sobre la transposición didáctica, este es nuestro punto de partida.

En sus comienzos, la noción de transposición didáctica (Chevallard, 1985, 1990) planteó ciertas hipótesis más o menos tácitas sobre el conocimiento matemático que la distinguieron fuertemente del constructivismo epistemológico (Sierpinska y Lerman, 1996). Por ejemplo, consideró que había un objeto identificable, llamado *saber sabio matemático*, contra el cual el contenido de la matemática enseñada en las escuelas podía ser comparado y juzgado como legítimo o no. Esto era completamente extraño al punto de vista constructivista, ya que le parecía inexplicable concebir la existencia de conocimiento fuera de las mentes de los individuos. Asimismo, la teoría de la transposición didáctica asumió tácitamente que existía un *estado de conocimiento ideal* al que la enseñanza y el aprendizaje deberían converger, lo cual fue contrario a la manera en que los constructivistas veían los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, la teoría de la transposición didáctica ha sido criticada por la vaguedad de la noción *saber sabio matemático* (Freudenthal, 1986). Una respuesta a este juicio (Arsac, 1992) reveló el carácter sociocultural de dicha noción: la sociedad reconoce la existencia de un cierto grupo de profesionales que producen conocimiento, el cual se considera *cognoscible* o *científico* dentro de la cultura.

También Chevallard (1991) se interesó por la relación entre la *práctica social de la investigación en matemática* y la *práctica social de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela*. Al centrarse más en las prácticas sociales y las instituciones que en el conocimiento, Chevallard extendió su teoría de la transposición didáctica a las dimensiones de una antropología (Sierpinska y Lerman, 1996), al decir que *todo conocimiento es conocimiento de una institución*. Bajo este enfoque, la investigación profesional en matemáticas es una institución, la escuela otra, la familia otra. Además, la matemática *vive* en la industria y los negocios, pero por medio de una adaptación, se convierte en una matemática diferente. Por ello, quienes se ocupen de la epistemología de la matemática deberán investigar las fuentes, modos de control y mecanismos de crecimiento de la matemática en todos los *nichos ecológicos* donde vive.

La aproximación antropológica a la epistemología llevó a Chevallard a adaptar la noción de conocimiento del individuo. No hay ninguna cuestión de estructuras o modelos mentales en esta noción, sino una actitud (*rapport*), una *relación a* y un funcionamiento con respecto a lo que una institución define como conocimiento. Se conoce o no sólo en relación con la opinión de una institución, no en un sentido absoluto (Arsac, 1992). Por tanto, no interesan los estudios de psicología del aprendizaje o del conocimiento, sino los análisis antropológicos sobre las instituciones.

Entre los resultados puestos a discusión desde los inicios de la transposición didáctica está la diferencia entre los contratos institucionales, que incluyen el conocimiento producido en la investigación matemática por los investigadores profesionales y los conocimientos escolares (Sierpinska y Lerman, 1996). Tal diferencia determina dos actitudes diferentes entre el investigador y el estudiante que aprende, como ha puesto en evidencia Balacheff (1990), a propósito de la actividad de demostrar.

La teoría de la transposición didáctica propone otros constructos epistemológicos, entre ellos las nociones de *despersonalización* y *descontextualización* del conocimiento. Quien crea resultados matemáticos los despersonaliza y los descontextualiza para comunicarlos a sus colegas matemáticos; en un contexto eficaz de aprendizaje sucede un proceso inverso. El aprendiz tiene que hacer el resultado como propio, crear un camino personal para su comprensión y encarnarlo en el contexto de los problemas donde trabaje: *el conocimiento debe convertirse en conocimiento personal*.

Otra distinción útil que establece la teoría de la transposición didáctica es la que trata el conocimiento como *saber a enseñar*, y como saber del cual los alumnos se deben responsabilizar (*conocimiento* o *saber a aprender*).

Las propuestas y afirmaciones del punto de vista antropológico contribuyen, como siempre ocurre cuando se introducen nuevas visiones teóricas, a esclarecer otras posiciones cuando hay posibilidad de analizarlas críticamente con diversas perspectivas. En este sentido, nos parece interesante su relación con el interaccionismo (Bauersfeld, 1994), ya que comparten algunos aspectos (Sierpinska y Lerman, 1996):

- Ven la educación desde una perspectiva social y cultural.
- Dan prioridad a los procesos que crean dominios de consenso o de acuerdo, interpretados como mecanismos que dan cuenta sobre la relativa estabilidad de la cultura, donde ciertos elementos de la cultura se convierten en aceptados como compartidos o que se imponen por sí, son transparentes.

Ambos puntos de vista están interesados en los mecanismos de cambio.

Los interaccionistas miran la enseñanza y el aprendizaje a un nivel micro –desde dentro de la clase– y atribuyen un papel importante a las contribuciones individuales, a los profesores y a los estudiantes. Aquí, las nociones de *reflexividad* y *emergencia* refieren al cambio en las culturas de la clase.

Para Chevallard, quien estudia los *sistemas didácticos* a un nivel macro, la fuente de cambio radica en el trabajo de la *noosfera* o la interfaz entre las escuelas y la sociedad en su conjunto, donde se conciben la organización, contenidos y funcionamiento del proceso educativo (Sierpinska y Lerman, 1996).

La *noosfera*, que componen grupos como los matemáticos, las comisiones ministeriales, los padres y directores escolares, se ocupa de *manipular* el conocimiento, de acuerdo con las prioridades que emergen en la sociedad, en un momento dado.

### 2.3. *Ejemplo de investigación*

#### 2.3.1. *El problema del paso de secundaria a la universidad*

Es este apartado describiremos la investigación de Bosch, Fonseca y Gascón (2004), la cual nos permitirá mostrar el tipo de explicación que aporta la TAD para el fenómeno del elevado fracaso escolar en los estudiantes de primer curso de estudios universitarios, basándose principalmente en la naturaleza y diversidad de las organizaciones matemáticas incluidas en la educación secundaria y universitaria.

La problemática docente y la hipótesis que se plantean en la investigación están formuladas en los siguientes términos:

> ¿Cómo suavizar o disminuir las enormes dificultades que encuentran los alumnos cuando pasan de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad? Y, complementariamente, ¿cómo podrían superarse las crecientes dificultades con las que tropiezan los profesores de matemáticas del primer ciclo universitario para llevar a cabo su trabajo? Estas dificultades se materializan en un elevado fracaso escolar, que en el primer curso de algunos estudios universitarios ha llegado a superar el 80%.
>
> [Se asume como hipótesis básica] una despersonalización de la problemática didáctica, situando en un primer plano el estudio de la actividad matemática institucionalizada. Se postula, en contra del punto de vista psicopedagógico dominante, que el problema del paso de secundaria a la universidad puede ser explicado a partir del análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las instituciones docentes (Bosch, Fonseca y Gascón 2004, p. 209).

Como consecuencia de esta hipótesis básica, se afirma que la causa del fracaso escolar en el estudio de la matemática durante los primeros cursos universitarios radica en las *contradicciones y discontinuidades* –o cambios bruscos– entre los contratos didácticos institucionales vigentes entre las instituciones universidad y secundaria. Dichos contratos rigen las organizaciones matemáticas y didácticas respectivas, es decir, el tipo de prácticas matemáticas que pueden desarrollarse y la forma como pueden organizarse en cada institución. "*Postulamos que el estudio comparado de las organizaciones que están presentes en la secundaria y en la universidad nos permitirá explicar mejor las discontinuidades entre ambas instituciones y los obstáculos que dificultan el tránsito entre ellas*" (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 211).

La investigación se centra en caracterizar cómo son las organizaciones matemáticas en secundaria y formula la siguiente hipótesis:

> La actividad matemática que se lleva a cabo en secundaria es esencialmente práctico-técnica y raramente alcanza el nivel tecnológico. Como consecuencia, las OM[3] que se estudian en S son generalmente OM puntuales, muy rígidas y aisladas (o poco coordinadas entre sí), lo que dificulta e incluso impide que en dicha institución se reconstruyan efectivamente OML relativamente completas (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 221).

Dicha hipótesis se comprueba a través de una prueba escrita que se aplica a una muestra de estudiantes de primer curso de universidad, en sus primeros días de ingreso y el análisis sobre una muestra de libros de texto de secundaria.

El cuestionario consta de 31 cuestiones, agrupadas en torno a cinco dimensiones:

C1. Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica.

C2. Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado.

C3. No existen dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea.

C4. Ausencia de técnicas para realizar una tarea inversa.

C5. Ausencia de situaciones abiertas de modelización.

Las dimensiones también son usadas para hacer una pauta de análisis sobre las tareas que incluyen los libros de texto.

Los autores precisan que la intención del cuestionario aplicado a los estudiantes *no pretende analizar los conocimientos matemáticos de los estudiantes*, ni individualmente ni colectivamente.

> Nuestro objetivo principal consiste en utilizar las respuestas de los estudiantes como indicadores de algunas características de las OM que se estudian en S y poner

[3] OM son las organizaciones matemáticas y OML las organizaciones matemáticas locales.

> de manifiesto la existencia y la naturaleza de determinados obstáculos epistemológicos y didácticos que dificultan el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en el paso de secundaria al primer ciclo de la universidad (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 227).

Los índices de dificultad que tienen los ítems del cuestionario (porcentajes de respuestas correctas), así como el número total de tareas de los libros que reúnen ciertas características asociadas a las dimensiones indicadas, son interpretados de manera conjunta para sacar conclusiones sobre las relaciones *"entre los diferentes aspectos de la* rigidez *de las* OM *que se estudian en secundaria*, la incompletitud relativa *de las* OML *que se reconstruyen en dicha institución, las* restricciones institucionales *que pesan sobre la actividad matemática escolar y las* discontinuidades *entre la secundaria y la universidad"* (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 238).

### 2.3.2. *Algunos comentarios críticos*

Parece obvio que hay diferencias importantes entre el tipo de matemática que se estudia en secundaria y la correspondiente al primer curso de la universidad. Si se introducen cambios en los currículos de matemática de ambos niveles y en la forma como se desarrolla el estudio, o son modificados los contratos didácticos, se puede influir en los aprendizajes de los estudiantes. El sentido de esa influencia (que el aprendizaje se optimice o no) depende de cómo sean los cambios que se realicen en la matemática y en la forma de estudiarlas.

No está claro que los cambios en las organizaciones matemáticas y didácticas que se proponen en esta investigación, basados en los postulados de la TAD, vayan a producir mejorías en los aprendizajes de los estudiantes de secundaria. Progresar desde unas *organizaciones matemáticas* puntuales, no articuladas y rígidas, como se hace actualmente en secundaria, hacia organizaciones matemáticas locales relativamente completas —que abarcan tipos de tareas integrados, con uso de diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellos; independencia de los ostensivos que integran las técnicas; existencia de tareas abiertas y de *técnicas inversas*; interpretación del resultado de aplicar las técnicas— puede ayudar, sin duda, a disminuir los índices de fracaso en la universidad, pero pueden aumentar los índices de fracaso en secundaria.

Lo anterior es consecuencia del postulado principal de la TAD, relativo a la despersonalización de la problemática didáctica: *el sujeto se identifica con la institución*. Si en la institución se configura una matemática de excelencia, los sujetos aprenderán de manera automática esa matemática excelente. La despersonalización también afecta al profesor, ya que las organizaciones didácticas se definen en términos de momentos de la actividad matemática (los cuales se traducen en tipos de tareas y técnicas que se proponen) y del discurso tecnológico-teórico que las articula, justifica y generaliza.

En esta investigación, la fusión sujeto-institución que postula el *enfoque antropológico de la didáctica* conduce a un planteamiento metodológico que nos parece inapropiado para corroborar sus hipótesis. Un cuestionario aplicado a los estudiantes evalúa los aprendizajes alcanzados, los conocimientos que han *adquirido*. Sin embargo, como en los aprendizajes influyen múltiples factores, entre ellos el tipo de matemática pretendida, no nos parece correcto inferir las características de esa matemática de los porcentajes de respuestas correctas. Incluso esto tampoco se podría hacer de las características de los libros de texto, puesto que los significados implantados en las clases no vienen fijados de manera determinista por el uso de los libros.

Por otra parte, creemos que el nivel de análisis de las organizaciones matemáticas en términos del *cuarteto* –tareas, técnicas, tecnologías y teorías– no permite un análisis suficiente de la complejidad ontosemiótica de esas organizaciones, lo cual puede ser un factor explicativo sobre las dificultades de aprendizaje y de los recursos didácticos necesarios para su logro. La brecha entre la secundaria y la universidad no se puede salvar sólo con base en *acercar* la matemática de secundaria a la de la universidad, sino también aproximando esta última a las competencias cognitivas de los estudiantes que reciben.

### 2.4. *Algunas limitaciones del punto de vista antropológico*

Desde nuestro punto de vista, los planteamientos teóricos del enfoque antropológico tienen ciertas limitaciones al ser tomados como base para la investigación en Didáctica de la Matemática. Algunas las mencionaremos a continuación:

- El énfasis epistemológico *antipsicológico*, a causa del cual no se concede espacio a la explicación psicológica de algunos fenómenos didácticos, limita el uso del punto de vista antropológico en el aula.
- Parece limitativo el hecho de querer reconducir todo hacia la institución, sin valorar y estudiar al individuo (sin enfatizar excesivamente en los aportes de la tendencia psicologista). En nuestra opinión, el complejo fenómeno del aprendizaje de la matemática no es del todo explicable en términos de la adhesión a cierta institución.
- La TAD ofrece herramientas teóricas potentes para estudiar las organizaciones matemáticas, su relación ecológica y las restricciones

institucionales que condicionan su evolución y desarrollo. Sin embargo, como hemos visto en el ejemplo anterior, la identificación sujeto-institución le impide poder dar cuenta de las condiciones bajo las que ocurre el aprendizaje.

- Otra limitación que reconocemos en la TAD se refiere al nivel de análisis que permite en lo tocante a las organizaciones matemáticas, ya que la inclusión del sistema de reglas conceptuales, proposicionales y argumentativas en el bloque tecnológico-teórico no logra reconocer la complejidad de los procesos de interpretación, de retención ni de las capacidades necesarias para que los alumnos sigan esas reglas. La investigación didáctica debe centrar su atención no sólo en la ecología de las organizaciones matemáticas, sino también en los fenómenos cognitivos que las componen, ligados al aprendizaje del sistema de reglas.

## 3. EL PUNTO DE VISTA ONTOLÓGICO Y SEMIÓTICO

### 3.1. *Presupuestos de partida*

Hemos visto cómo la aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática corresponde a una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, entre otros). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente del ser humano y de su actividad –privada o social–, en algún dominio real no precisado. El conocimiento matemático consiste en descubrir relaciones preexistentes que vinculan entre sí tales objetos.

Tal concepción implica una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que se considera como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo esta idea, el significado del término *función* será simplemente el concepto de función dada por su definición matemática.

Desde el punto de vista epistemológico, la definición pragmática del significado, según Kutschera (1979), "*es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje*" (p. 148).

Creemos que los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de la matemática (Ernest, 1991) llevan también a adoptar las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. El hecho de que en el seno de ciertas instituciones se hagan determinados tipos de prácticas, determina la emergencia progresiva de los *objetos matemáticos* y que su *significado* esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a su mera definición matemática.

Para continuar con el análisis que hemos llevado a cabo, examinaremos las consideraciones de Ullmann (1962), quien abre el camino a una perspectiva de articulación, al decir que las posiciones realistas y pragmáticas no son contradictorias; por ende, la posición antropológica no se opone a la realista.

Ullmann (1962) describe a las teorías realistas como *referenciales*, y a las pragmáticas como *operacionales o contextuales*. Desde su punto de vista, las teorías pragmáticas son un complemento de las realistas:

> (…) el significado de una palabra se puede verificar sólo estudiando su uso. No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase 'referencial' y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es en definitiva la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema y ninguno es completo sin el otro». (pp. 76-77)

Si tomamos esta observación de Ullmann, podemos afirmar que el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático; dichos usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

Lo que estamos vislumbrando es el punto de partida para otro enfoque de la DdM que amplía la visión antropológica, ya que trata de eliminar los límites mencionados en el apartado 2.4, se aproxima a la *práctica* compartida en la clase y supera la supuesta dicotomía realismo-pragmatismo, así como entre antropología y psicología.

### 3.2. *Principales nociones del punto de vista ontológico y semiótico*

#### 3.2.1. *Sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas*

El *significado personal/significado institucional de un objeto matemático* se define como un sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994).

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1998). En el estudio de la matemática, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa reparar en los sistemas de prácticas operativas y discursivas que manifiestan las personas cuando actúan ante tipos de situaciones problemáticas.

A las preguntas ¿qué es el objeto matemático media aritmética? y ¿qué significa o representa la expresión *media aritmética*?, se propone como respuesta: *"el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional), para resolver un tipo de situaciones-problema en las cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos"*.

La noción de *significado institucional y personal de los objetos matemáticos* implica las de *práctica personal*, *sistema de prácticas personales* y *objeto personal (o mental)*, que son herramientas útiles para estudiar la "cognición matemática individual" (Godino y Batanero, 1994, 1998). Cada uno de esos conceptos tiene su versión institucional, y con ellos se trata de precisar y hacer operativo el término de *relación personal e institucional al objeto*, introducido por Chevallard (1992).

Aquí se nota bien cómo el punto de vista ontosemiótico se fija más en la cuestión del aprendizaje individual; presta atención a aquellos aspectos psicológicos no tomados en cuenta por la perspectiva antropológica.

#### 3.2.2. *Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*

El *objeto matemático* designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2002). Esta idea es tomada de Blumer, quien afirma que un objeto es *"cualquier entidad o cosa a* *la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo"* (Blumer, 1982, p. 8).

Los tipos de objetos matemáticos son los siguientes:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros).
- *Situaciones* (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios).
- *Procedimientos* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- *Conceptos* (que son introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función).
- *Propiedad o atributo de los objetos* (como los enunciados sobre conceptos).
- *Argumentos* (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo).

A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías.

### 3.2.3. *Relaciones entre objetos: función semiótica*

La noción de *función de signo* –tomada de Hjemlesv (1943), y que Eco (1979) describió como *función semiótica*– atañe a la dependencia entre un texto y sus componentes y entre éstos entre sí. Se trata de las correspondencias –ya sea relaciones de dependencia o función– entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado) que establece un sujeto (persona o institución), de acuerdo con cierto criterio o código de correspondencia. Los códigos pueden ser reglas –hábitos o convenios– que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en relación en las circunstancias fijadas. Sin embargo, Eco (1979) observa cómo tal dependencia no tiene siempre un código prefijado y, por tanto, se evidencia su carácter relativo.

Para nosotros, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de los siguientes tipos:

- *Representacional* (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito).
- *Instrumental* (un objeto usa a otro u otros como instrumento).

- *Estructural* (dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos).

Las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la matemática y generalizan radicalmente la noción de representación (Font, Godino y D'Amore, 2007). Aquí, el papel de representación no lo asume el lenguaje de manera exclusiva; en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problema, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos) pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas: "*Signo es cualquier cosa que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así* ad infinitum" (Peirce, 1931-1958).

La *función semiótica* surge cuando entre dos objetos (ostensivos o no ostensivos) se establece una dependencia representacional o instrumental, donde uno de los objetos se pone en el lugar del otro o bien uno es usado por otro.

Con la idea de *función semiótica* se evidencia la naturaleza esencialmente relacional tanto de la actividad matemática como de los procesos que difunden el conocimiento matemático. Esta noción permite:

- Formular en términos semióticos y de un modo general y flexible el conocimiento matemático.
- Explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y los errores de los estudiantes.

### 3.2.4. *Configuraciones de objetos*

La noción de *sistema de prácticas* resulta útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática, es pertinente introducir los seis tipos de entidades primarias:

- *Situaciones*.
- *Procedimientos*.
- *Lenguajes*.
- *Conceptos*.
- *Propiedades*.

- *Argumentos*.

En cada caso, dichos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, que se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, al igual que las relaciones entre ellos al resolver un problema matemático. Las configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Ahora bien, los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su doble versión: personal e institucional.

### 3.2.5. *Atributos contextuales*

La noción de *juego de lenguaje* (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante porque la consideramos, junto con la de *institución*, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y les atribuyen una naturaleza funcional.

Por su parte, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que surgen de ellas, de acuerdo con el juego de lenguaje en que participan, pueden ser vistas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal-institucional*: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, sus objetos emergentes se consideran *institucionales*, mientras que si los sistemas son específicos de una persona, los objetos serán *personales*.
- *Ostensivos (gráficos o símbolos)-no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemática, y se representan en forma textual, oral, gráfica o gestual).*
- *Extensivo-intensivo*: Tal dualidad atañe a la relación entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (por ejemplo, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o abstracta (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$).
- *Elemental-sistémico*: En algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias –que, se supone, son conocidas previamente–, y en otras como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
- *Expresión-contenido*: Alude al antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

Las facetas aparecen distribuidas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Al concebirse como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dan lugar a sus distintas *versiones*.

Godino, Batanero y Roa (2005) describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio. Los tipos de objetos que describen son *sistemas de prácticas*, *entidades emergentes*, *configuraciones o redes ontosemióticas, facetas o atributos contextuales duales* y *función semiótica como entidad relacional básica*, que dan una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático.

### 3.2.6. *Conocimiento y comprensión*

*Saber*, *conocer* y *comprender* se interpretan en términos de *competencia* para resolver problemas cuando ponemos al componente pragmático-antropológico como base en el punto de vista ontosemiótico de la cognición matemática. Pero la introducción de los objetos emergentes, de los atributos contextuales y la función semiótica permite articular de manera coherente una componente referencial sobre el conocimiento matemático. Así, *saber*, *conocer* y *comprender* un objeto *O* (ostensivo o no, concreto o abstracto) por parte de un sujeto *X* (persona o institución) se interpretan en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer en unas circunstancias fijadas, donde se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por parte de un agente interpretante y forma un conocimiento.

La particular insistencia sobre los objetos justifica su denominación como *ontológica*, ya que la atención se dirige a la esencia de los objetos en sí, sin someterla a crítica, pero aceptándolos como emergentes de la práctica. La atención en los aspectos semióticos, comprendida en el sentido más amplio posible, justifica la denominación de la teoría como *semiótica*.

## 3.3. *Ejemplo de investigación en DdM realizada bajo el punto de vista ontosemiótico*

### 3.3.1. *El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada*

En este apartado describiremos la investigación que presenta la tesis doctoral de V. Font, hecha bajo el enfoque ontosemiótico para tratar cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en estudiantes de Bachillerato, cuyas edades fluctúan entre los 16 y 17 años.

Por tal motivo, usaremos como referencia accesible el artículo Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005), que emplea la noción de *significado institucional* –vista como *sistema de prácticas*– para diseñar, implantar y analizar una experiencia de estudio sobre la derivada, reconociendo los siguientes tipos de significados sistémicos: *de referencia*, *pretendido*, *implantado* y *evaluado*. Asimismo, recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, lo cual permite caracterizar sus significados personales iniciales y finales, así como algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos llevan a proponer significados pretendidos, que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por tal motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos, que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad) era insuficiente. De aquí se deduce que una manera de asegurar que los alumnos adquieran un buen significado personal del objeto derivada consiste en lograr un buen significado personal sobre dichos objetos previos.
- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido, que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas $-f(x)$ o $f'(x)-$, modificó los significados de los objetos personales *funciones elementales* de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Esas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales *funciones elementales* antes del proceso de instrucción, ni habían sido contempladas de manera explícita en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de *función semiótica*, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo y expresión-contenido, son usadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de las definiciones *derivada en un punto* y *función derivada*. Este análisis identifica los conflictos semióticos potenciales que son tomados en cuenta al diseñar la experiencia y trata algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

Otros ejemplos de investigaciones experimentales con la perspectiva ontosemiótica, que aparecen en tesis de doctorado, artículos y monografías, pueden ser consultadas en las páginas electrónicas del Grupo de Investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada, España: http://www.ugr.es/local/jgodino y http://www.ugr.es/local/batanero.

En los trabajos hechos bajo la perspectiva ontosemiótica se puede observar el interés por articular las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, en un intento por superar algunas limitaciones de la perspectiva antropológica, que describimos en el apartado 2.4. Además, se intenta desarrollar un modelo ontológico-semiótico explícito y detallado que permita realizar análisis cognitivos a nivel de las respuestas de los sujetos a tareas específicas, así como de las transcripciones textuales sobre episodios didácticos puntuales.

## 4. NECESIDAD Y POSIBILIDAD DE ARTICULACIÓN DE ENFOQUES TEÓRICOS EN DdM

Una de las tareas más urgentes e importantes que deben afrontar los investigadores en DdM, como hemos sugerido en la primera sección de este artículo, consiste en clarificar, comparar y articular los enfoques teóricos que se ocupan actualmente. El problema es urgente y crítico porque nuestra disciplina, al estar vinculada con otras –entre las que destacamos la epistemología, la psicología, la pedagogía y la matemática– usan instrumentos y presupuestos teóricos divergentes cuya coherencia y utilidad no es del todo obvia y no se puede dar por asumida.

En el actual panorama de la DdM notamos un cierto *autismo teórico* (encierre en sí mismo) y una desarticulación conceptual y metodológica no sólo entre paradigmas y escuelas de pensamiento lejanas (pragmatismo, realismo, constructivismo, cognitivismo), sino también entre las teorías emergentes de nivel intermedio que comparten un mismo paradigma epistemológico de base. Por ejemplo, en el caso de la TAD, ¿qué relaciones tiene con la teoría de las situaciones (Brousseau), la de los campos conceptuales (Vergnaud) y la dialéctica instrumento-objeto (Douady)? ¿Qué relaciones hay entre esta teoría y la de los registros de representación semiótica (Duval)?

Para poder hacer esta comparación y articulación es preciso construir un sistema de referencia más global, que permita situar cada teoría en el panorama comprensivo de la educación matemática. De igual modo, tener en cuenta simultáneamente las distintas dimensiones implicadas en los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática –epistémica, instruccional, política– y los diversos niveles de análisis.

El punto de vista ontosemiótico (Godino y Batanero, 1994) inició su camino de reflexión metadidáctica, al constatar algunas limitaciones de la teoría antropológica que había comenzado a formular Chevallard (1991, 1992). En particular trató de matizar la elección antipsicologista inicial, que ha acentuado en su trabajo posterior y su divergencia con otras teorías precedentes, como la de situaciones y la de los campos conceptuales.

La finalidad de progresar en la comparación y articulación de modelos teóricos ha llevado al EOS a formular algunas *nociones primitivas* con alto grado de generalidad, como *práctica matemática*, *institución*, *objeto matemático* y *función semiótica*, al igual que las dualidades cognitivo-antropológicas (*persona-institución*, *elemental-sistémico*, *ostensivo-no ostensivo*, *extensivo-intensivo*, *expresión-contenido*). Dichos instrumentos ofrecen una plataforma unificada a partir de la cual nos parece posible afrontar la tarea de comparar y articular los enfoques teóricos usados en DdM. Sin embargo, esta afirmación queda como una labor para próximos trabajos.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arsac, G. (1992). The evolution of a theory in didactics: the example of didactic transposition. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Matemamatics. Selected Papers*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics 10* (3), 2-8.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bloor, D. (1982). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London, UK: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ, USA: Prentice Hall.

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics 21* (1), 3-28.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. En *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* Grenoble, France: LSD2, IMAG-Université J. Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. En R. Noirfalise y M-J Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 83-112). France: Saint-Sauves d'Auvergne.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématics 25* (2), 151-186.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna, Italia: Pitagora. [Versión al español. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática* (2005). Prefacio de Ricardo Cantoral. México: Editorial Reverté].

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology*. (Vol. 1, pp. 111-130). Nicosia, Chipre: Intercollege Press.

Eco, U. (1979). *Trattato di semiotica generale*. Milano, Italia: Bompiani.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, UK: Falmer Press.

Font, V.; Rodino, D. J. y D'Amore, B (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics 27* (2) [aceptado para su publicación].

Freudenthal, H. (1986). Review of Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. *Educational Studies in Mathematics 17*, 323-327.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18* (1), 7-33.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics 60* (1), 3-36.

Godino, J. D.; Font, V.; Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (1), 117-150.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegomena to a theory of language*. Madison, USA: University of Winconsin.

Kutschera, F. Von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid, España: Gredos.

Lakatos, I. y Musgrave, A. (Eds.) (1960). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers* (Vols. 1-8). C. Hartshorne, P. Weiss & A. W. Burks (Eds.). Cambridge, USA: Harvard University Press.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld.

Sierpinska, A. y Lerman S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer A. P.

Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna, Italia: Pitagora.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid, España: Aguilar.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* Oxford, USA: Basil Blackwell.

Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid, España: Alianza.

Trabajo realizado en el marco de los proyectos:

*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico,* Università di Bologna. Italia.

*MCYT–FEDER: BS2002-02452* y *MCYT–FEDER: SEJ2004-00789*. Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, Madrid, España.

## Autores

**Bruno D´Amore.** Departamento de Matemáticas. Universidad de Bolonia, Italia; damore@dm.unibo.it

**Juan D. Godino.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España; jgodino@ugr.es